
Teilchenaggregation in Chemotaxis

Ana Cañizares García

LMU München

Bad-Tölz

26.02.15

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

- Zusammenfassung des Projekts
 - i. Einführung: Chemotaxis
 - ii. Makroskopische und mikroskopische Darstellungen
 - iii. Ziel: Herleitung
- Vorstellung der bisherigen Arbeit: Aggregation in der mikroskopischen Gleichung
 - i. Aggregation für $N = 3$
 - ii. Kernidee: Besselsche Prozesse
 - iii. Verallgemeinerung: N beliebig

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

- Was ist Chemotaxis?

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

- Was ist Chemotaxis?
 - i. *Taxis* aus dem altgriechisch τάξις „Ordnung“: Ausrichtung von Lebewesen nach einem Reiz.
 - ii. Chemotaxis = Orientierung aufgrund von chemischen Reizen.
 - iii. Andere Beispiele: Phototaxis, Gravitaxis, Electrotaxis...

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

- Was ist Chemotaxis?
 - i. *Taxis* aus dem altgriechisch τάξις „Ordnung“: Ausrichtung von Lebewesen nach einem Reiz.
 - ii. Chemotaxis = Orientierung aufgrund von chemischen Reizen.
 - iii. Andere Beispiele: Phototaxis, Gravitaxis, Electrotaxis...
- *Dictyostelium discoideum* (Dicty): Motivation der Keller-Segel Gleichung.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

- Wachstum
- Hunger
- Aggregation
- Migration
- Neues Zyklus

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

- Wachstum
- Hunger
- Aggregation
- Migration
- Neues Zyklus

Film!

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

2 Perspektiven:

- Makroskopisch [Keller-Segel, 1970]

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

2 Perspektiven:

- Makroskopisch [Keller-Segel, 1970]

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_t(x) = \frac{1}{2\pi} \nabla_x \cdot ((K * \rho_t)(x) \rho_t(x)) + \Delta_x \rho_t(x).$$

Poblationsdichte $\rho: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$K: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $K(x) = \frac{x}{|x|^2}$ Coulomb Wechselwirkung

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

2 Perspektiven:

- Makroskopisch [Keller-Segel, 1970]

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_t(x) = \frac{1}{2\pi} \nabla_x \cdot ((K * \rho_t)(x) \rho_t(x)) + \Delta_x \rho_t(x).$$

Poblationsdichte $\rho: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$K: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $K(x) = \frac{x}{|x|^2}$ Coulomb Wechselwirkung

- Aggregation $\longleftrightarrow \lim_{t \rightarrow T} \|\rho_t\|_\infty = \infty$ für $T < \infty$.

2 Perspektiven:

- Makroskopisch [Keller-Segel, 1970]

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_t(x) = \frac{1}{2\pi} \nabla_x \cdot ((K * \rho_t)(x) \rho_t(x)) + \Delta_x \rho_t(x).$$

Poblationsdichte $\rho: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$K: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $K(x) = \frac{x}{|x|^2}$ Coulomb Wechselwirkung

- Aggregation $\longleftrightarrow \lim_{t \rightarrow T} \|\rho_t\|_\infty = \infty$ für $T < \infty$.
- Bekannt: Aggregation $\iff M > 8\pi$, $M := \int_{\mathbb{R}^2} \rho_0$

[Dolbeault et al., 2004], [Blanchet et al., 2006], [Blanchet et al., 2008].

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

2 Perspektiven:

- Mikroskopisch

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

2 Perspektiven:

- Mikroskopisch

$$dX_i = -\frac{1}{2\pi} \frac{M}{N} \sum_{i \neq j} \frac{X_i - X_j}{|X_i - X_j|^2} dt + \sqrt{2} dB_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

$X_i \in \mathbb{R}^2$ Teilchen, $i = 1, \dots, N$

M = Totalmasse

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

2 Perspektiven:

- Mikroskopisch

$$dX_i = -\frac{1}{2\pi} \frac{M}{N} \sum_{i \neq j} \frac{X_i - X_j}{|X_i - X_j|^2} dt + \sqrt{2} dB_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

$X_i \in \mathbb{R}^2$ Teilchen, $i = 1, \dots, N$

M = Totalmasse

- Aggregation von $X_i, X_j \iff \exists T < \infty$ mit $X_i(t) = X_j(t)$ für jedes $t \geq T$.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

2 Perspektiven:

- Mikroskopisch

$$dX_i = -\frac{1}{2\pi} \frac{M}{N} \sum_{i \neq j} \frac{X_i - X_j}{|X_i - X_j|^2} dt + \sqrt{2} dB_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

$X_i \in \mathbb{R}^2$ Teilchen, $i = 1, \dots, N$

M = Totalmasse

- Aggregation von $X_i, X_j \iff \exists T < \infty$ mit $X_i(t) = X_j(t)$ für jedes $t \geq T$.
- Kritische Masse für Aggregation?

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

- Zu Zeigen ist:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

- Zu Zeigen ist:

$$\rho_t^N(x) := \frac{M}{N} \sum_{i=1}^N \delta(x - X_t^{i,N}) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{w} \rho_t$$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

- Zu Zeigen ist:

$$\rho_t^N(x) := \frac{M}{N} \sum_{i=1}^N \delta(x - X_t^{i,N}) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{w} \rho_t$$

$X_t^{1,N}, \dots, X_t^{N,N}$ Lösung der N -Teilchen mikroskopischen Gleichung

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

- Zu Zeigen ist:

$$\rho_t^N(x) := \frac{M}{N} \sum_{i=1}^N \delta(x - X_t^{i,N}) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{w} \rho_t$$

$X_t^{1,N}, \dots, X_t^{N,N}$ Lösung der N -Teilchen mikroskopischen Gleichung

ρ_t Lösung der makroskopischen Gleichung

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

- Zu Zeigen ist:

$$\rho_t^N(x) := \frac{M}{N} \sum_{i=1}^N \delta(x - X_t^{i,N}) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{w} \rho_t$$

$X_t^{1,N}, \dots, X_t^{N,N}$ Lösung der N -Teilchen mikroskopischen Gleichung

ρ_t Lösung der makroskopischen Gleichung

- Bisher nur für regularisierte Wechselwirkungen:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

- Zu Zeigen ist:

$$\rho_t^N(x) := \frac{M}{N} \sum_{i=1}^N \delta(x - X_t^{i,N}) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{w} \rho_t$$

$X_t^{1,N}, \dots, X_t^{N,N}$ Lösung der N -Teilchen mikroskopischen Gleichung

ρ_t Lösung der makroskopischen Gleichung

- Bisher nur für regularisierte Wechselwirkungen:

$$K_\varepsilon(x) := \frac{x}{|x|(|x| + \varepsilon)} \quad \text{für } \varepsilon > 0, \quad K_\alpha(x) := \frac{x}{|x|^{\alpha+1}} \quad \text{für } \alpha \in (0, 1).$$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

- Zu Zeigen ist:

$$\rho_t^N(x) := \frac{M}{N} \sum_{i=1}^N \delta(x - X_t^{i,N}) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{w} \rho_t$$

$X_t^{1,N}, \dots, X_t^{N,N}$ Lösung der N -Teilchen mikroskopischen Gleichung

ρ_t Lösung der makroskopischen Gleichung

- Bisher nur für regularisierte Wechselwirkungen:

$$K_\varepsilon(x) := \frac{x}{|x|(|x| + \varepsilon)} \quad \text{für } \varepsilon > 0, \quad K_\alpha(x) := \frac{x}{|x|^{\alpha+1}} \quad \text{für } \alpha \in (0, 1).$$

[Haškovec et al. 2009], [Godinho et al. 2013].

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

- Zu Zeigen ist:

$$\rho_t^N(x) := \frac{M}{N} \sum_{i=1}^N \delta(x - X_t^{i,N}) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{w} \rho_t$$

$X_t^{1,N}, \dots, X_t^{N,N}$ Lösung der N -Teilchen mikroskopischen Gleichung

ρ_t Lösung der makroskopischen Gleichung

- Bisher nur für regularisierte Wechselwirkungen:

$$K_\varepsilon(x) := \frac{x}{|x|(|x| + \varepsilon)} \quad \text{für } \varepsilon > 0, \quad K_\alpha(x) := \frac{x}{|x|^{\alpha+1}} \quad \text{für } \alpha \in (0, 1).$$

[Haškovec et al. 2009], [Godinho et al. 2013].

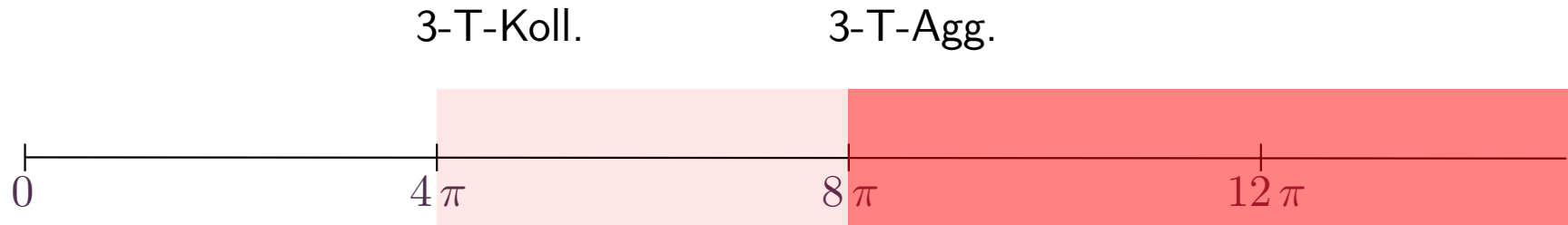
- 1. Aggregation in der mikroskopischen Gleichung?

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

Frage: Wann finden Kollisionen statt? Wann sind sie stabil?

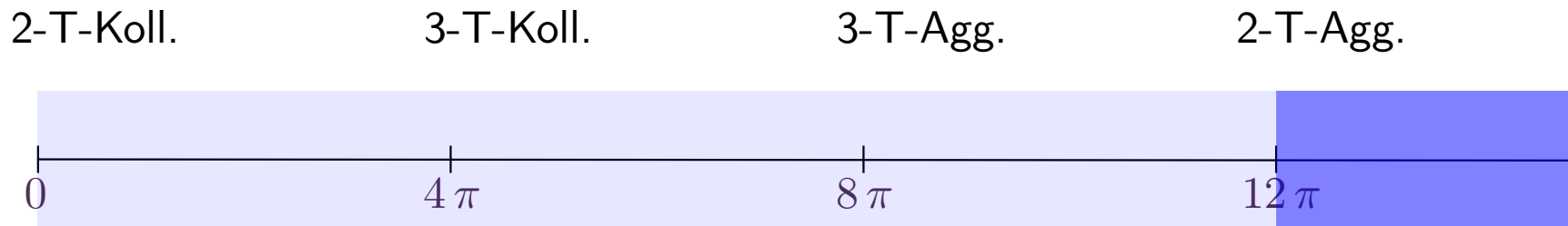
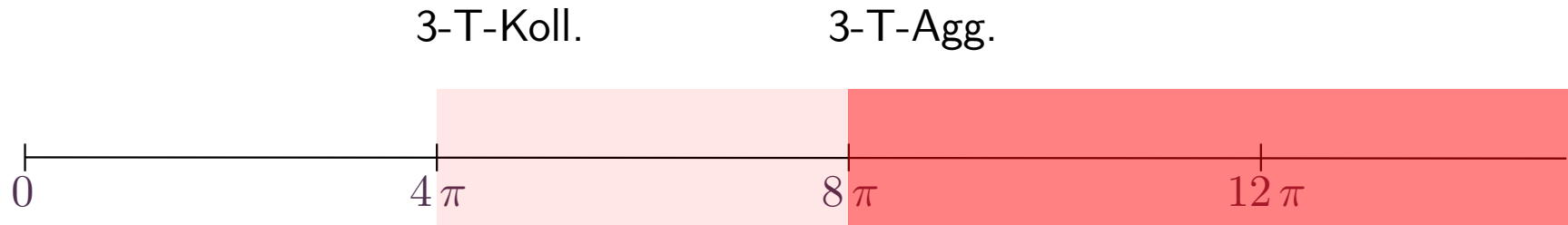
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

Frage: Wann finden Kollisionen statt? Wann sind sie stabil?



1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

Frage: Wann finden Kollisionen statt? Wann sind sie stabil?



1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

Es sei $N = 3$ und X_i , $i = 1, 2, 3$ die Lösung der mikroskopischen Gleichung.

Satz. Für die Teilchen X_i , $i = 1, 2, 3$ gilt

i. Eine 3-Teilchen-Kollision ist stabil $\iff M \geq 8\pi$.

ii. Eine 2-Teilchen-Kollision ist stabil $\iff M \geq 12\pi$.

Außerdem

iii. $\mathbb{P}(3\text{-Teilchen-Kollision} | \text{kein 2-Teilchen Aggregat}) = \begin{cases} 0, & M < 4\pi \\ 1, & M \geq 4\pi \end{cases}$.

iv. $\mathbb{P}(2\text{-Teilchen-Kollision} | \text{kein 3-Teilchen Aggregat}) = 1$.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

Es sei $N = 3$ und X_i , $i = 1, 2, 3$ die Lösung der mikroskopischen Gleichung.

Satz. Für die Teilchen X_i , $i = 1, 2, 3$ gilt

i. Eine 3-Teilchen-Kollision ist stabil $\iff M \geq 8\pi$.

ii. Eine 2-Teilchen-Kollision ist stabil $\iff M \geq 12\pi$.

Außerdem

iii. $\mathbb{P}(3\text{-Teilchen-Kollision} | \text{kein 2-Teilchen Aggregat}) = \begin{cases} 0, & M < 4\pi \\ 1, & M \geq 4\pi \end{cases}$.

iv. $\mathbb{P}(2\text{-Teilchen-Kollision} | \text{kein 3-Teilchen Aggregat}) = 1$.

Folgerung. Aggregation von Teilchen findet genau dann statt, wenn $M \geq 8\pi$.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

Ein stochastischer Prozess Y_ν heißt **Bessel-Prozess der Ordnung** $\nu \in \mathbb{R}$, wenn es Lösung der SDE

$$d|Y_\nu|^2 = \nu dt + 2Y_\nu dB, \quad Y_\nu(0) = y,$$

ist.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

Ein stochastischer Prozess Y_ν heißt **Bessel-Prozess der Ordnung** $\nu \in \mathbb{R}$, wenn es Lösung der SDE

$$d|Y_\nu|^2 = \nu dt + 2Y_\nu dB, \quad Y_\nu(0) = y,$$

ist.

Lemma 2. Für Y_ν gilt mit Wahrscheinlichkeit 1 folgendes:

- i. Ist $\nu \geq 2$ und $y \neq 0$, so trifft Y_ν die 0 nie.
- ii. Für $0 < \nu < 2$ trifft Y_ν die 0 und verlässt sie sofort wieder.
- iii. Für $\nu \leq 0$ trifft Y_ν die 0 und bleibt für immer dort.

[Bass. *Stochastic Processes*. Cambridge University Press, 2011.]

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

- Substitution

$$U_1 := \frac{X_1 - X_2}{2}, \quad U_2 := \frac{1}{2\sqrt{3}} (X_1 + X_2 - 2X_3) \quad \text{und} \quad U_3 := \frac{1}{\sqrt{6}} (X_1 + X_2 + X_3)$$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

- Substitution

$$U_1 := \frac{X_1 - X_2}{2}, \quad U_2 := \frac{1}{2\sqrt{3}} (X_1 + X_2 - 2X_3) \quad \text{und} \quad U_3 := \frac{1}{\sqrt{6}} (X_1 + X_2 + X_3)$$

- Mikroskopischen Gleichungen werden

$$dU_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{M}{6\pi} \left(-\frac{U_1}{|U_1|^2} - \frac{\sqrt{3} U_2 + U_1}{|\sqrt{3} U_2 + U_1|^2} + \frac{\sqrt{3} U_2 - U_1}{|\sqrt{3} U_2 - U_1|^2} \right) \right) dt + dB'_1$$

$$dU_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\frac{M}{2\pi} \left(-\frac{\sqrt{3} U_2 + U_1}{|\sqrt{3} U_2 + U_1|^2} - \frac{\sqrt{3} U_2 - U_1}{|\sqrt{3} U_2 - U_1|^2} \right) \right) dt + dB'_2$$

$$dU_3 = dB'_3.$$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

- Es gilt

$$\begin{aligned} d|U_1|^2 &= \left(\frac{-M}{12\pi} \left(2 + \frac{(X_1 - X_3)(X_1 - X_2)}{|X_1 - X_3|^2} + \frac{(X_2 - X_3)(X_2 - X_1)}{|X_2 - X_3|^2} \right) + 2 \right) dt \\ &\quad + 2U_1 dB'_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d|U_2|^2 &= \left(\frac{-M}{12\pi} \left(2 + \frac{(X_1 - X_3)(X_2 - X_3)}{|X_1 - X_3|^2} + \frac{(X_2 - X_3)(X_1 - X_3)}{|X_2 - X_3|^2} \right) + 2 \right) dt \\ &\quad + 2U_2 dB'_2. \end{aligned}$$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

- Es gilt

$$\begin{aligned} d|U_1|^2 &= \left(\frac{-M}{12\pi} \left(2 + \frac{(X_1 - X_3)(X_1 - X_2)}{|X_1 - X_3|^2} + \frac{(X_2 - X_3)(X_2 - X_1)}{|X_2 - X_3|^2} \right) + 2 \right) dt \\ &\quad + 2U_1 dB'_1 \end{aligned}$$

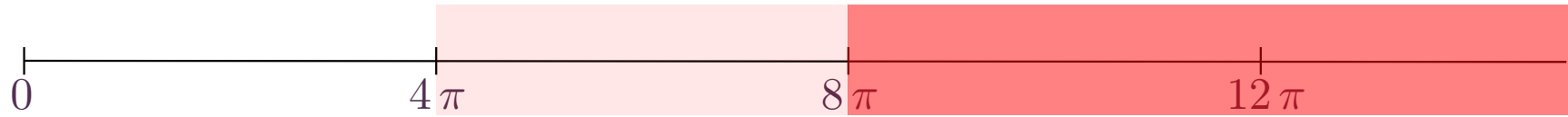
$$\begin{aligned} d|U_2|^2 &= \left(\frac{-M}{12\pi} \left(2 + \frac{(X_1 - X_3)(X_2 - X_3)}{|X_1 - X_3|^2} + \frac{(X_2 - X_3)(X_1 - X_3)}{|X_2 - X_3|^2} \right) + 2 \right) dt \\ &\quad + 2U_2 dB'_2. \end{aligned}$$

- Plan: Vergleiche U_1 und U_2 mit Bessel-Prozessen.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

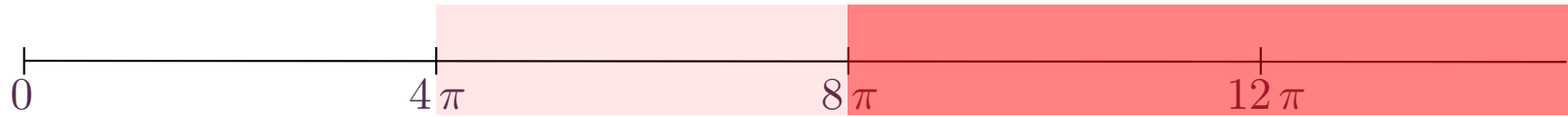


1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16



- 3-Teilchen stoßenzusammen $\iff |(U_1, U_2)|^2 = 0$.

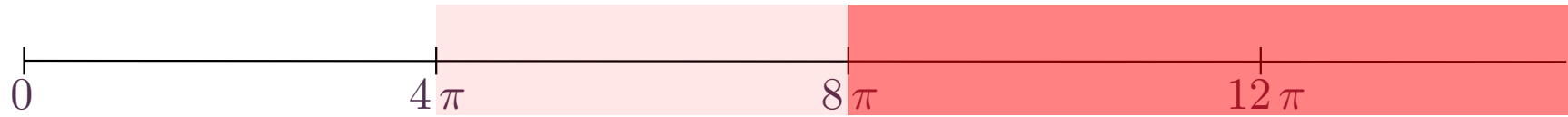
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16



- 3-Teilchen stoßenzusammen $\iff |(U_1, U_2)|^2 = 0$.
- (U_1, U_2) ist ein Bessel-Prozess der Ordnung $\nu_3 := -\frac{M}{2\pi} + 4$:

$$d |(U_1, U_2)|^2 = \left(-\frac{M}{2\pi} + 4 \right) dt + 2 (U_1, U_2) d(B'_1, B'_2).$$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16



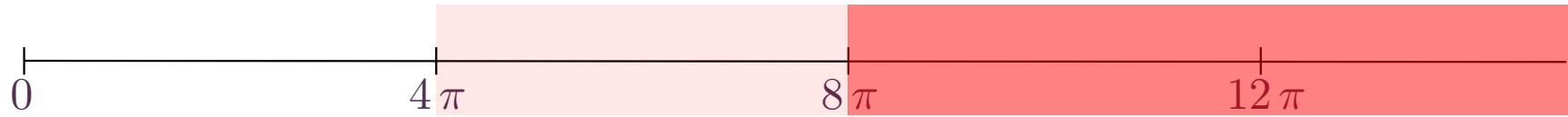
- 3-Teilchen stoßenzusammen $\iff |(U_1, U_2)|^2 = 0$.
- (U_1, U_2) ist ein Bessel-Prozess der Ordnung $\nu_3 := -\frac{M}{2\pi} + 4$:

$$d |(U_1, U_2)|^2 = \left(-\frac{M}{2\pi} + 4 \right) dt + 2 (U_1, U_2) d(B'_1, B'_2).$$

Es sei $(U_1(0), U_2(0)) = (u_1, u_2)$. Fallunterscheidung aus Lemma 2

- $\nu_3 \geq 2$ und $(u_1, u_2) \neq 0 \implies (U_1, U_2)$ trifft die 0 nie.
- $0 < \nu_3 < 2 \implies (U_1, U_2)$ trifft die 0 und verlässt sie sofort wieder.
- $\nu_3 \leq 0 \implies (U_1, U_2)$ trifft die 0 und bleibt für immer dort.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16



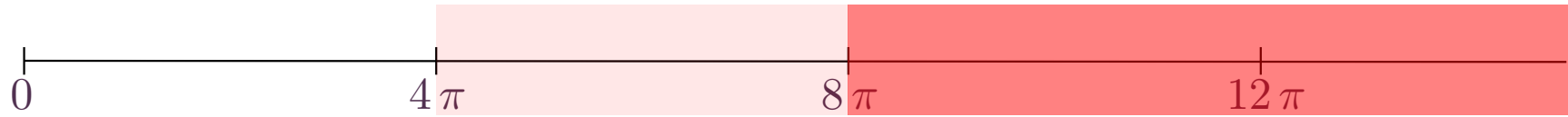
- 3-Teilchen stoßenzusammen $\iff |(U_1, U_2)|^2 = 0$.
- (U_1, U_2) ist ein Bessel-Prozess der Ordnung $\nu_3 := -\frac{M}{2\pi} + 4$:

$$d |(U_1, U_2)|^2 = \left(-\frac{M}{2\pi} + 4 \right) dt + 2 (U_1, U_2) d(B'_1, B'_2).$$

Es sei $(U_1(0), U_2(0)) = (u_1, u_2)$. Fallunterscheidung aus Lemma 2

- $M \leq 4\pi$ und $(u_1, u_2) \neq 0 \implies (U_1, U_2)$ trifft die 0 nie.
- $4\pi < M < 8\pi \implies (U_1, U_2)$ trifft die 0 und verlässt sie sofort wieder.
- $M \geq 8\pi \implies (U_1, U_2)$ trifft die 0 und bleibt für immer dort.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16



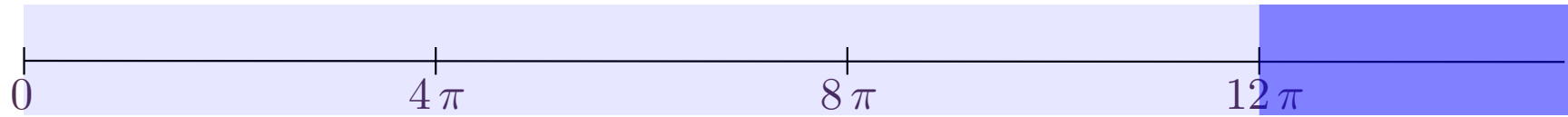
- 3-Teilchen stoßenzusammen $\iff |(U_1, U_2)|^2 = 0$.
- (U_1, U_2) ist ein Bessel-Prozess der Ordnung $\nu_3 := -\frac{M}{2\pi} + 4$:

$$d |(U_1, U_2)|^2 = \left(-\frac{M}{2\pi} + 4 \right) dt + 2 (U_1, U_2) d(B'_1, B'_2).$$

Es sei $(U_1(0), U_2(0)) = (u_1, u_2)$. Fallunterscheidung aus Lemma 2

- $M \leq 4\pi$ und $(u_1, u_2) \neq 0 \implies$ keine 3-Teilchen-Kollision findet statt.
- $4\pi < M < 8\pi \implies$ 3-Teilchen-Kollisionen finden statt, aber sind unstabil.
- $M \geq 8\pi \implies$ 3-Teilchen-Kollisionen finden statt und sind stabil.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16



1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16



- 2-Teilchen (X_1, X_2) stoßen zusammen $\iff |U_1|^2 = 0$.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16



- 2-Teilchen (X_1, X_2) stoßen zusammen $\iff |U_1|^2 = 0$.
- U_1 ist kein Bessel-Prozess aber...

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16



- 2-Teilchen (X_1, X_2) stoßen zusammen $\iff |U_1|^2 = 0$.
- U_1 ist kein Bessel-Prozess aber...
- In der Nähe einer Kollisionszeit zwischen X_1 und X_2 (aber nicht X_3) ist $|(X_1 - X_2)| \ll |X_1 - X_3|, |X_2 - X_3|$. Dann gilt

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16



- 2-Teilchen (X_1, X_2) stoßen zusammen $\iff |U_1|^2 = 0$.
- U_1 ist kein Bessel-Prozess aber...
- In der Nähe einer Kollisionszeit zwischen X_1 und X_2 (aber nicht X_3) ist $|(X_1 - X_2)| \ll |X_1 - X_3|, |X_2 - X_3|$. Dann gilt

$$d|U_1|^2 \sim \left(2 - \frac{M}{6\pi}\right) dt + 2U_1 dB'_1.$$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16



- 2-Teilchen (X_1, X_2) stoßen zusammen $\iff |U_1|^2 = 0$.
- U_1 ist kein Bessel-Prozess aber...
- In der Nähe einer Kollisionszeit zwischen X_1 und X_2 (aber nicht X_3) ist $|(X_1 - X_2)| \ll |X_1 - X_3|, |X_2 - X_3|$. Dann gilt

$$d|U_1|^2 \sim \left(2 - \frac{M}{6\pi}\right) dt + 2U_1 dB'_1.$$

Es sei $\nu_2 := 2 - \frac{M}{6\pi}$ und $U_1(0) = u_1$. Es gilt

- i. $\nu_2 \geq 2$ und $u_1 \neq 0 \implies U_1$ trifft die 0 nie.
- ii. $0 < \nu_2 < 2 \implies U_1$ trifft die 0 und verlässt sie sofort wieder.
- iii. $\nu_2 \leq 0 \implies U_1$ trifft die 0 und bleibt für immer dort.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16



- 2-Teilchen (X_1, X_2) stoßen zusammen $\iff |U_1|^2 = 0$.
- U_1 ist kein Bessel-Prozess aber...
- In der Nähe einer Kollisionszeit zwischen X_1 und X_2 (aber nicht X_3) ist $|(X_1 - X_2)| \ll |X_1 - X_3|, |X_2 - X_3|$. Dann gilt

$$d|U_1|^2 \sim \left(2 - \frac{M}{6\pi}\right) dt + 2U_1 dB'_1.$$

Es sei $\nu_2 := 2 - \frac{M}{6\pi}$ und $U_1(0) = u_1$. Es gilt

- $M \leq 0$ und $u_1 \neq 0 \implies U_1$ trifft die 0 nie.
- $0 < M < 12\pi \implies U_1$ trifft die 0 und verlässt sie sofort wieder.
- $M \geq 12\pi \implies U_1$ trifft die 0 und bleibt für immer dort.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16



- 2-Teilchen (X_1, X_2) stoßen zusammen $\iff |U_1|^2 = 0$.
- U_1 ist kein Bessel-Prozess aber...
- In der Nähe einer Kollisionszeit zwischen X_1 und X_2 (aber nicht X_3) ist $|(X_1 - X_2)| \ll |X_1 - X_3|, |X_2 - X_3|$. Dann gilt

$$d|U_1|^2 \sim \left(2 - \frac{M}{6\pi}\right) dt + 2U_1 dB'_1.$$

Es sei $\nu_2 := 2 - \frac{M}{6\pi}$ und $U_1(0) = u_1$. Es gilt

- $M \leq 0$ und $u_1 \neq 0 \implies U_1$ trifft die 0 nie.
- $0 < M < 12\pi \implies$ 2-Teilchen-Kollisionen finden statt, aber sind unstabil.
- $M \geq 12\pi \implies$ 2-Teilchen-Kollisionen finden statt und sind stabil.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

Satz. Es sei $a_k := \frac{k-2}{k(k-1)} 8\pi N$, $b_k := \frac{8\pi N}{k}$, für $k = 1, \dots, N$. Es gilt

- i. Eine k -Teilchen-Kollision ist stabil $\iff M \geq b_k$.
- ii. Für $M < a_k$ ist $\mathbb{P}(k\text{-Teilchen-Kollision}) = 0$.
- iii. Für $M \geq a_k$ ist
$$\mathbb{P}(k\text{-Teilchen-Kollision} \mid \text{kein } j\text{-Teilchen Aggregat für } j \neq k) = 1.$$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

Satz. Es sei $a_k := \frac{k-2}{k(k-1)} 8\pi N$, $b_k := \frac{8\pi N}{k}$, für $k = 1, \dots, N$. Es gilt

- i. Eine k -Teilchen-Kollision ist stabil $\iff M \geq b_k$.
- ii. Für $M < a_k$ ist $\mathbb{P}(k\text{-Teilchen-Kollision}) = 0$.
- iii. Für $M \geq a_k$ ist
$$\mathbb{P}(k\text{-Teilchen-Kollision} \mid \text{kein } j\text{-Teilchen Aggregat für } j \neq k) = 1.$$

Folgerung. Aggregation von Teilchen findet genau dann statt, wenn $M \geq 8\pi$.

Vielen Dank für eure Aufmerksamkeit!